4章練習問題

<4-4. 随伴行列｜4章練習問題解説>

練習問題 4

(4-1) （容易）次の計算をせよ

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $(-1+i)\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 3 & 3 \\ 2+3i & 2-3i \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x^2-1 & 2x+1 \\ -2y+z & -y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4-2) （容易）実数の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ とあらわせることを示せ。

(4-3) （容易）2 行 2 列の行列 A, B であって、AB と BA とが異なる例を見つけよ。

(4-4) （標準）任意の 2 以上の自然数 n について、n 行 n 列行列 A, B であって、$A \neq O, B \neq O$ であって、かつ $AB = O$ であるような例を提示せよ。

(4-5) （標準）行列に関する次の公式を証明せよ。

1. 交換則 (commutativity):$A + B = B + A$
2. 結合則 (associativity):$(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $c(A + B) = cA + cB, (c + d)A = cA + dA,$
4. $(cd)A = c(dA)$
5. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
6. $(A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC$
7. $AO = O, OA = O$

(4-6) （やや難）（線形代数の問題ではないが） 2 重数列 $\{a_{n,m}\}$ (n, m は自然数) であって、

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} \neq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

となる例を提示せよ。

(4-7)　（標準）転置行列に関する次の公式を証明せよ。

1. ${}^t(cA) = c\,{}^tA$

(4-8)　（標準）複素共役行列に関する次の公式を証明せよ。

1. $\overline{(\overline{A})} = A$
2. $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{(cA)} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = \overline{A}\overline{B}$

(4-9)　（標準）随伴行列に関する次の公式を証明せよ。

1. ${}^t(\overline{A}) = \overline{{}^tA}$
2. $(A^*)^* = A$
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(cA)^* = \overline{c}A^*$
5. $(AB)^* = B^*A^*$

(4-10)　（容易）複素列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}$ とあらわせることを示せ。

(4-11)　（容易）$n \times n$ 行列 A が $A^* - A = O$ を満たすとき A をエルミート行列というが、A の (i, i) 成分が実数であることを示せ。

(4-12)　（標準）n 次実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $n \times n$ 行列 A に対して、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, {}^tA\boldsymbol{b})$$

を示せ。

(4-13)　（標準）n 次複素ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ と $n \times n$ 行列 A に対して、

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$$

を示せ。

(4-14) （標準） 4×4 行列を 4 つの 2×2 行列に分けて考えることを**行列の区分け**という。つまり、$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & a' & b' \\ c & d & c' & d' \\ \hline a'' & b'' & a''' & b''' \\ c'' & d'' & c''' & d''' \end{array}\right)$ を

$$P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, R=\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix} a''' & b''' \\ c''' & d''' \end{pmatrix}$$

とみて、これを $A=\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ のように書くのである。このときに次の公式を証明せよ。

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP'+QR' & PQ'+QS' \\ RP'+SR' & RQ'+SS' \end{pmatrix}$$

（P,Q,R,S,P',Q',R',S' はすべて 2×2 行列とする。行列はかける順番にも注意して計算をすること。）

この公式から容易に導ける系として、

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & Q' \\ O & S' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP' & PQ'+QS' \\ O & SS' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P' & O \\ O & S' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PP'' & O \\ O & SS' \end{pmatrix}$$

がある。

(4-15) $n>1$ を自然数とする。n 行 n 列行列 X,Y で以下の条件を満たすものは存在するか。

（条件）任意の n 行 n 列行列 A に対して $XAY={}^tA$

<4-4. 随伴行列 | 4章練習問題解説>